Diebens „magisches Rechteck“ und Wunderrechner Bach

Hermann Gottschewski, Berlin

Anders als der Titel vielleicht suggeriert, geht es in diesem Text weder um Bach noch überhaupt um Musik. Lediglich wird bewiesen, dass eine mathematische Überlegung, mit der H.A. Kellner etwas über Bachs Wohltemperiertes Klavier aussagen zu können glaubte, nicht fundiert ist. Abgesehen davon hat der Verfasser seinem mathematischen Spieltrieb freien Lauf gelassen.

1. Der Anlass dieses Beitrages

Herbert Anton Kellner hat in den *Cöthener Bach-Heften* einen Beitrag vorgelegt, in dem unter anderem behauptet wird, dass Bach die Taktzahlen im *Wohltemperierten Klavier* (Teil I) nach einem mathematischen Schema konzipiert habe.[1] Die in diesem Schema hervortretende Zahl 174 gebe dem Spieler einen versteckten Hinweis auf die musikalische Temperatur, mit der das Werk aufgeführt werden solle. Folgt man der Argumentation Kellners, so muss man annehmen, dass die historisch nachweisbare Tatsache, dass mehrere Stücke des wohltemperierten Klaviers in kürzeren Frühfassungen existierten, darauf beruht, dass die Stücke zur Erfüllung des Schemas nachträglich erweitert wurden.

Nun wird sicher nicht einmal Kellner selbst behaupten, dass jede seiner Überlegungen zwingend und jede seiner Deutungen die einzig mögliche sei; ich möchte mich deshalb mit der Diskussion von Einzelheiten nicht aufhalten. Es gibt allerdings ein zentrales Argument, das gewissermaßen die Legitimation für die weiteren Deutungen verschafft, und an der Gültigkeit dieses Argumentes scheint Kellner keine Zweifel zu haben, da es den Anschein mathematischer Exaktheit erweckt[2]:

> Analysiert man die architektonische Struktur, *Das Wohltemperirte Clavier*, erster Teil, weisen die 48 Stücke […] ganz verschiedene Längen (in Takten) auf. Das kürzeste Stück […] mißt 18 Takte, das längste […] 115 […]. […] Wäre nicht in der Gesamtheit dieser Taktzahlen ein „ungeordneter Zahlenhaufen“ zu erwarten? Überraschender Weise können aber diese 48 Zahlen zu einem magischen Rechteck 12*4 der Zeilensummen 174 angeordnet werden! Bereits an diese Möglichkeit zu denken, diese Intuition, ist ganz außerordentlich. Es war Henk Dieben (1902-1956), holländischer Pianist und Musikwissenschaftler, dem es gelungen ist, dieses magische Rechteck aufzustellen[3]. Es weist die man-

1 Herbert Anton Kellner, „Die Temperirungstonart [sic] H-Dur und deren Stücke im *Wohltemperirten Clavier*“, in: *Cöthener Bach-Hefte* 10 (Veröffentlichungen der Bach-Gedenkstätte Schloss Köthen, Historisches Museum für Mittelanhalt XXIV), S. 27-67.

2 Ebenda S. 31-32.

3 [Fußnote von H.A. Kellner:] Henk Dieben, Getallenmystiek bij Bach. In: Musica Sacra (Bruges) 5, 21-23, 1954, 47-49, 1955; leichter zugänglich in Hans Brandts-Buys: Het Wohltemperirte Klavier van Johann Sebastian Bach.

nigfaltigsten weiteren Symmetrieeigenschaften auf, in der Art des Druckes angedeutet[4]:

Henk Diebens magisches Rechteck

		A	**B**	**C**	**D**		
1	**116**	35	44	40	55	**232**	**174**
2		19	**18**	**22**	115		**174**
3	**232**	41	**72**	**24**	37	**116**	**174**
4		44	75	24	31		**174**
5	**116**	19	29	87	39	**232**	**174**
6		27	**41**	**48**	58		**174**
7	**232**	34	**70**	**40**	30	**116**	**174**
8		86	42	26	20		**174**
9	**116**	35	38	54	47	**232**	**174**
10		19	**24**	**104**	27		**174**
11	**232**	87	**35**	**24**	28	**116**	**174**
12		76	34	29	35		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

[Tabelle 1]

Wäre es vorstellbar, dieses magische Rechteck — hochsymmetrisch gegliedert in die verschiedensten Untergruppen und Blöcke […] — könnte auf reinem Zufall beruhen? Diese mathematische Frage stellte Henk Dieben einem Hochschulprofessor, der ihm natürlich bestätigt hat, bloßer Zufall ist ausgeschlossen. Daher muß es Bach selbst gewesen sein, der diese Taktlängen der Praeludien und Fugen seines *Wohltemperirten Clavieres* diesem magischen Rechteck unterworfen hat — Teil seiner *dispositio*.

Soweit Kellner. Sollten Dieben und Kellner recht haben damit, dass bloßer Zufall „natürlich" „ausgeschlossen" sei, wäre Bach nicht nur ein genialer Komponist, sondern vielleicht auch der „Wunderrechner", als den ihn Kellner bezeichnet.[5] Die Konsequenzen aus einer solchen Erkenntnis wären wohl weitreichend genug, dass die Sache einer Überprüfung wert ist und man sich nicht auf das Urteil eines ungenannten Hochschulprofessors verlassen sollte.

Arnhem 1955, Derde herziene druk, S. 81-83. [Anmerkung von H. Gottschewski: Dem Verfasser waren beide genannten Schriften bis zur Abfassung dieses Textes nicht zugänglich.]

4 [Anm. von H. Gottschewski:] Die Tabelle wurde etwas übersichtlicher formatiert als in dem Aufsatz Kellners. Ein Druckfehler (Formatierung der 28 in Zeile 11) wurde korrigiert.

5 Ebd. S. 38.

2. Vorüberlegungen

Das Diebensche Rechteck weist folgende Symmetrien auf:

1. Alle 12 Zeilensummen sind gleich.
2. Alle 4 Spaltensummen sind gleich.
3. Die rechts und links liegenden 12 Viererblöcke ergeben alternierend jeweils Summen, die im Verhältnis von 1:2 (116:232) zu einander stehen.
4. Die drei markierten Mittelblöcke ergeben zusammengenommen dieselbe Summe wie die Spalten.

Zum vierten Punkt wäre zu ergänzen, dass sich hierin (über die Teilung in vier Spalten hinaus) eine weitere Vierteilung der Tabelle in Gruppen mit gleicher Summe ausdrückt, denn aus der Kombination der in 1., 2. und 4. genannten Symmetrien lässt sich folgern, dass die Tabelle sich folgendermaßen in Gruppen von je 12 Zahlen gliedern lässt, die jeweils die Summe 522 ergeben:

35	**44**	**40**	**55**
19	**18**	**22**	**115**
41	**72**	**24**	**37**
44	**75**	**24**	**31**
19	**29**	**87**	**39**
27	**41**	**48**	**58**
34	**70**	**40**	**30**
86	**42**	**26**	**20**
35	**38**	**54**	**47**
19	**24**	**104**	**27**
87	**35**	**24**	**28**
76	**34**	**29**	**35**

[Tabelle 2]

Die je 12 gleich formatierten Zahlen ergeben jeweils die Summe 522. Es handelt sich um eine Teilung, die diagonal quer steht zu der Teilung in 12 Viererblöcke, die in Tabelle 1 durch die Grauschattierungen angegeben ist.

Die Zahlen des Wohltemperierten Klaviers lassen sich allerdings auch auf andere Weise in ein magisches Rechteck bringen, nämlich eines mit sechs Spalten und acht Zeilen. Dabei lassen sich ähnliche Symmetrien herstellen:

		A	B	C	D	E	F		
Alternatives magisches Rechteck I									
1	**174**	24	28	29	70	35	75	**348**	**261**
2		26	**29**	**38**	**27**	**104**	37		**261**
3	**348**	87	**41**	**55**	**19**	**35**	24	**174**	**261**
4		35	58	72	18	44	34		**261**
5	**174**	19	40	35	41	39	87	**348**	**261**
6		27	**22**	**31**	**115**	**42**	24		**261**
7	**348**	76	**44**	**40**	**24**	**30**	47	**174**	**261**
8		54	86	48	34	19	20		**261**
		348	**348**	**348**	**348**	**348**	**348**		**2088**

Summe der zwei mittleren Blöcke einzeln: **348**

[Tabelle 3]

Bei diesem Rechtecktyp wäre es auch möglich, statt der Proportion 1:2 (174:348) in allen Sechserblöcken die Summe 261 zu erhalten, etwa so:

		A	B	C	D	E	F		
Alternatives magisches Rechteck II									
1	**261**	87	35	20	27	34	58	**261**	**261**
2		35	**44**	**40**	**31**	**41**	70		**261**
3	**261**	40	**22**	**104**	**37**	**29**	29	**261**	**261**
4		34	42	19	87	41	38		**261**
5	**261**	28	48	27	75	39	44	**261**	**261**
6		24	**115**	**19**	**30**	**54**	19		**261**
7	**261**	76	**24**	**47**	**35**	**24**	55	**261**	**261**
8		24	18	72	26	86	35		**261**
		348	**348**	**348**	**348**	**348**	**348**		**2088**

Summe der zwei mittleren Blöcke einzeln: **348**

[Tabelle 4]

Warum hat Henk Dieben in Tabelle 1 nicht ebenfalls alle Viererblöcke auf die gleichen Summen wie die Zeilen gebracht? Liegt in der Proportion 1:2 (116:232) ein besonderer struktureller Sinn, oder haben diese Zahlen einen symbolischen Hintergrund? Vermutlich ist die Antwort auf diese Frage viel prosaischer: Die Proportion 1:2 war die „einfachste“ Lösung, die sich finden ließ, weil sich gleiche Viererblocksummen mit den Bachschen Zahlen nicht erreichen ließen. Es ist nämlich unmöglich, wie sich folgendermaßen beweisen lässt:

Die Taktzahlen des Wohltemperierten Klaviers lauten der Größe nach geordnet 18, 19, 19, 19, 20, 22, 24, 24, 24, 24, 26, 27, 27, 28, 29, 29, 30, 31, 34, 34, 35, 35, 35, 35, 37, 38, 39, 40, 40, 41, 41, 42, 44, 44, 47, 48, 54, 55, 58, 70, 72, 75, 76, 86, 87, 87, 104, 115. Wenn diese in einem magischen Rechteck des Formates vier-mal-zwölf mit der Zeilensumme 174 angeordnet sind, dann gibt es eine Zeile, in der die Zahl 115 vorkommt und deren Summe 174 beträgt. In dieser Zeile kann die kleinste Zahl nicht größer als 19 sein, denn 20 + 20 + 20 + 115 = 175. Auch kann die kleinste Zahl nicht 19 sein, denn wenn die 19 in dieser Zeile vorkommt, ist die Summe der beiden übrigen Zahlen 174 – (115 + 19) = 40, und da es nur *eine* 20 und keine 21 gibt, kann diese Summe nicht anders als durch 18 und 22 gebildet werden. Somit ist die kleinste Zahl 18, und die Summe der verbleibenden Zahlen ist 174 – (115 + 18) = 41. Da es keine 21 und keine 23 gibt, kann die Summe 41 nur durch 19 und 22 gebildet werden. Somit lauten die vier in dieser Zeile vorkommenden Zahlen 18, 19, 22 und 115.

Nun gibt es auch einen Viererblock, in dem die 115 vorkommt. Wäre die Summe dieses Viererblocks 174, so bestünde er aus analogen Gründen ebenfalls aus den Zahlen 18, 19, 22 und 115. Die 18 und die 22 kommen aber in der Tabelle nur je einmal vor und stehen, wie oben gezeigt, mit der 115 in ein und derselben Zeile. Daher können in dem Viererblock, in dem die 115 steht, nicht sowohl die 18 als auch die 22 vorkommen, und somit kann die Summe dieses Viererblocks nicht 174 sein.

Wenn Bach sich tatsächlich ein magisches Rechteck konstruiert hätte, um die Zahl 174 der Nachwelt zu überliefern, und wenn er deshalb extra die Länge mehrerer Stücke des Wohltemperierten Klaviers modifiziert hätte, hätte er dann nicht lieber möglichst viele Summen auf 174 gebracht? Es wäre jedenfalls unter Einhaltung aller von Kellner ex- oder implizit genannten Rahmenbedingungen ohne weiteres möglich gewesen, auch alle Viererblocksummen auf 174 zu bringen; hätte Bach etwa das G-Dur-Präludium, das in der Frühfassung 15 Takte hatte, nicht auf 19 sondern auf 20 Takte verlängert und zum Ausgleich die Fuge unverändert gelassen (statt sie von 85 auf 86 Takte zu verlängern), dann wäre folgendes Rechteck möglich geworden:

Magisches Rechteck mit zwei geänderten Zahlen

		A	B	C	D		
1	**174**	22	18	115	19	**174**	**174**
2		47	**87**	**20**	20		**174**
3	**174**	41	**31**	**48**	54	**174**	**174**
4		58	44	37	35		**174**
5	**174**	26	42	30	76	**174**	**174**
6		34	**72**	**29**	39		**174**
7	**174**	40	**35**	**55**	44	**174**	**174**
8		24	75	40	35		**174**
9	**174**	85	38	24	27	**174**	**174**
10		24	**27**	**19**	104		**174**
11	**174**	34	**29**	**70**	41	**174**	**174**
12		87	24	35	28		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

[Tabelle 5]

Die Folgerung, dass Bach mit der Zahlenstruktur die Zahl 174 als verschlüsselte Botschaft vermitteln wollte, ist also selbst dann fragwürdig, wenn man die Hypothese des magischen Rechtecks akzeptiert: Denn erstens gibt es mehrere Rechtecke, auf denen Bachs Komposition beruhen könnte — davon mindestens eines (Tabelle 4), in dem die Summe 174 gar nicht vorkommt —; und zweitens ist Diebens Rechteck unter der Voraussetzung, dass es zur Übermittlung dieser Zahl eingeführt wurde, weder die nächstliegende noch die beste Konstruktion. Dass auch eine erheblich perfektere Konstruktion mit einfachen Mitteln möglich gewesen wäre, soll der nächste Abschnitt zeigen.

3. Konstruktion magischer Rechtecke

Dieben hat die knifflige Aufgabe gelöst hat, aus einer gegebenen Zahlenmenge[6] ein magisches Rechteck herzustellen. Die Idee, dass dies eventuell möglich sein könnte, ergab sich vermutlich aus der Feststellung, dass die Gesamtzahl aller Takte durch 12 teilbar war, denn ohne diese Voraussetzung wäre die Herstellung gleicher Zeilensummen von vornherein ausgeschlossen. Die Konstruktion tatsächlich durchzuführen war ohne Computerhilfe eine beachtliche Leistung, die zwar vielleicht nicht den An-

[6] Der in diesem Beitrag verwendete Mengenbegriff ist nicht mit dem mathematischen Mengenbegriff identisch, weil die Wiederholung von Zahlen zugelassen ist. {20, 20, 24} wäre in unserem Sinne also eine Menge mit drei Elementen.

spruch auf den Titel eines „Wunderrechners“ begründet, aber immerhin ein gehöriges Maß an mathematischer Begabung und Ausdauer erforderte.

Die Leistung Bachs hingegen lag nach Kellners Vorstellung darin, in ein Rechteck mit vorgegebenen Zeilensummen bereits vorhandene Zahlen einzusetzen und dann die nicht passenden Zahlen so zu modifizieren, dass die geforderten Symmetrien erfüllt wurden.

Dies ist allerdings eine viel leichtere Aufgabe als die von Dieben gelöste. Der Name „magisches Quadrat“ und davon abgeleitet „magisches Rechteck“ rührt nämlich daher, dass es mit *vorgegebenen* Zahlen äußerst schwer ist, auf eine Lösung zu kommen, weil jede Änderung, die man an einer Stelle macht, die bereits hergestellten Symmetrien an anderer Stelle wieder zerstört. Wer sich daran versucht, bekommt gewissermaßen den Eindruck, das ganze Ding sei verhext. Dies gilt aber eben nur, wenn man mit einer vorgegebenen Zahlenmenge auskommen muss. Wenn man hingegen die Grundmenge der verwendeten Zahlen modifizieren darf und somit an einer Stelle die Zahlen ändern kann ohne gleichzeitig auch an anderer Stelle Änderungen vorzunehmen, ist nichts besonders Magisches an diesen Strukturen. Dies gilt jedenfalls, solange nicht alle Zahlen verschieden sein müssen — und im Wohltemperierten Klavier gibt es ja mehrere Taktzahlen, die mehr als einmal vorkommen.[7]

Es ist nicht nur nicht besonders schwer, ein Rechteck wie das Diebensche aus beliebigen Zahlen frei zu konstruieren, sondern es ist sogar ein Leichtes, auf diese Weise zu noch höheren Symmetrien zu gelangen. Dies sei an einigen Beispielen erläutert.

Die nächstliegende Verbesserung wäre es, statt der ziemlich schwachen Symmetrie in der Mitte der Tabelle (Diebens 4. Symmetrie) bzw. der sich daraus ergebenden Vierteilung (Tabelle 2) zu fordern, dass jeder einzelne der diagonal versetzten Viererblöcke die Summe 174 aufweist. Dabei blieben alle Symmetrien von Dieben erhalten, aber eine weitere wesentliche käme hinzu:

[7] Meistens werden als „magische Quadrate“ Gebilde bezeichnet, die lauter verschiedene Zahlen enthalten. Diese Forderung ist von daher leicht verständlich, dass das gegenteilige Extrem — ein Quadrat, in dem lauter gleiche Zahlen stehen — trivialerweise überall gleiche Summen hervorbringt, aber in keiner Weise „magisch“ ist. Bei Anlegung strenger Maßstäbe wäre das Diebensche Rechteck somit überhaupt kein magisches Rechteck.

Frei konstruiertes magisches Rechteck I

		A	B	C	D		
1	**116**	23	40	77	34	**232**	**174**
2		32	21	47	74		**174**
3	**232**	49	52	54	19	**116**	**174**
4		32	99	23	20		**174**
5	**116**	43	22	30	79	**232**	**174**
6		26	25	54	69		**174**
7	**232**	59	48	47	20	**116**	**174**
8		78	47	25	24		**174**
9	**116**	21	36	66	51	**232**	**174**
10		38	21	42	73		**174**
11	**232**	24	72	39	39	**116**	**174**
12		97	39	18	20		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe aller fett umrandeten Viererblöcke: **174**

[Tabelle 6]

Wenn alle fünf Viererblöcke in der Mitte die Summe 174 aufweisen und die Zeilen- und Spaltensummen stimmen, gilt die Summe automatisch auch für diejenigen fett umrandeten Gebiete, die sich am rechten und linken bzw. oberen und unteren Rand mit den jeweils auf der gegenüberliegenden Seite liegenden zu einem Viererblock ergänzen (so z.B. 40 und 77 oben mit 39 und 18 unten, ebenso die vier Ecken), so dass sich insgesamt 12 Viererblöcke mit der Summe 174 ergeben.

Aufgrund der letztgenannten Tatsache ist auch in diesem Rechteck jede Zahl Mitglied sowohl in einer Zeile als auch in einem Viererblock mit der Summe 174. Daher lässt sich mit denselben Argumenten wie oben (Beweis vor Tabelle 5) zeigen, dass die Zahlen des Wohltemperierten Klaviers nicht in ein Rechteck gebracht werden können, das alle in Tabelle 6 gezeigten Symmetrien aufweist.

Das doppelte Vorkommen der 174-er Summe könnte man dadurch umgehen, dass man auch für die diagonal versetzten Viererblöcke alternierend die Summen 116 und 232 fordert. Dabei würde zwar die 4. Symmetrie Diebens verletzt, aber sie würde durch ein wesentlich stärkere ersetzt. Auch ein solches Rechteck lässt sich leicht konstruieren:

Frei konstruiertes magisches Rechteck II

		A	B	C	D		
1	**116**	*33*	**23**	**27**	*91*	**232**	**174**
2		**26**	*34*	*92*	**22**		**174**
3	**232**	**29**	*83*	*23*	**39**	**116**	**174**
4		*90*	**30**	**25**	*29*		**174**
5	**116**	*37*	**24**	**37**	*76*	**232**	**174**
6		**29**	*26*	*91*	**28**		**174**
7	**232**	**39**	*88*	*27*	**20**	**116**	**174**
8		*86*	**19**	**19**	*50*		**174**
9	**116**	*45*	**24**	**54**	*51*	**232**	**174**
10		**21**	*26*	*82*	**45**		**174**
11	**232**	**33**	*97*	*27*	**17**	**116**	**174**
12		*54*	**48**	**18**	*54*		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Fette Viererblöcke: **116**; *kursive Viererblöcke:* **232**

[Tabelle 7]

Allerdings stellt sich heraus, dass auch eine solche Struktur aus den Bachschen Zahlen nicht hergestellt werden kann.

Beweis: Wenn die gezeigten Symmetrien gelten, gibt es insgesamt zwölf Viererblöcke mit der Summe 116 — sechs grau schattierte und sechs fett gedruckte (die über den Rand reichenden werden mitgezählt). Die schattierten Viererblöcke überschneiden sich mit den fett gedruckten an zwölf Stellen (den schattierten, fetten Feldern B1, A2, D3, C4, B5, A6, D7, C8, B9, A10, D11, C12). Die Gesamtsumme dieser zwölf Zahlen nennen wir *Schnittsumme*. Die Schnittsumme ist mindestens so groß wie die Summe der zwölf kleinsten Zahlen der Tabelle. Ferner gibt es 36 Zahlen, die in wenigstens einem der 116er-Blöcke stehen, also in der Vereinigungsmenge der schattierten und fetten Viererblöcke. Die Gesamtsumme dieser 36 Zahlen nennen wir *Vereinigungssumme*. Die Vereinigungssumme ist mindestens so groß wie die Summe der 36 kleinsten Zahlen der Tabelle. Die Vereinigungssumme und die Schnittsumme zusammengenommen entsprechen genau der Summe der schattierten Viererblöcke plus der Summe der fetten Viererblöcke, es gilt also:

Schnittsumme + *Vereinigungssumme* = 12*116

Somit kann die Summe der kleinsten 12 Zahlen der Tabelle zusammengenommen mit der Summe der kleinsten 36 Zahlen der Tabelle nicht größer als 12 * 116 = 1392 sein. Bei den Zahlen des Wohltemperierten Klaviers ist die

Summe der 12 kleinsten Zahlen 266 und die Summe der 36 kleinsten Zahlen 1149; zusammengenommen ist dies 1415, also mehr als 1392, was bei Zahlen, die die Symmetrie der Tabelle 7 erfüllen, nicht der Fall sein kann — was zu beweisen war.

Mit den Tabellen 6 und 7 sind jedoch die Grenzen der mit frei konstruierten Zahlen ohne größeren Aufwand an Theorie erzielbaren Symmetrien noch lange nicht erreicht. Beispielsweise können, von Tabelle 6 ausgehend, auch noch die in der folgenden Tabelle durch Linien angedeuteten Summen vereinheitlicht werden, ohne dass andere Symmetrien verloren gehen. Dabei nimmt die Anzahl der frei wählbaren Zahlen natürlich ab, und ein großer Teil der Tabelle ergibt sich automatisch aufgrund der geforderten Summen. Dennoch sind die Freiheiten noch groß genug, um eine große Vielfalt an Zahlen zu bekommen.

Frei konstruiertes magisches Rechteck III

		A	B	C	D		
1	**116**	24	21	63	66	**232**	**174**
2		34	37	**53**	50		**174**
3	**232**	65	**62**	22	**25**	**116**	**174**
4		51	54	36	33		**174**
5	**116**	**31**	32	52	59	**232**	**174**
6		23	**30**	**60**	61		**174**
7	**232**	64	57	**27**	**26**	**116**	**174**
8		**56**	55	35	28		**174**
9	**116**	41	38	46	49	**232**	**174**
10		**17**	20	**70**	67		**174**
11	**232**	71	**68**	16	19	**116**	**174**
12		45	48	42	39		**174**
							2088

Summe aller fett umrandeten Viererblöcke sowie aller mit Linien bezeichneten Viererspalten: **174**

Summe aller mit Linien bezeichneten Diagonalen im grauen Bereich: **116***; im weißen Bereich:* **232**

[Tabelle 8]

Wenn man beliebige Zahlen in eine solche Tabelle einsetzen darf und nur auf das Zustandekommen der richtigen Summen achten muss, ist es nicht schwer, durch „try and error“ auf ein Rechteck wie das gezeigte zu kommen. Eine systematische Methode, die ohne Fehlversuche zum Ziel führt, ist folgende: In die zwölf Felder, in denen fett gedruckte Zahlen stehen, werden beliebige Zahlen eingesetzt. Man sucht dann jeweils nach Quadrupeln, deren Summe vorgegeben ist und von denen bereits drei Zahlen festliegen. Die vierte lässt sich dann durch Subtraktion der bereits vorhandenen Zahlen von der geforderten Summe berechnen. Auf diese Weise ergeben sich nach und nach sämtliche fehlenden Zahlen. Die Sache geht in jedem Fall auf. Allerdings kann es bei dieser Methode passieren, dass in der Tabelle negative Zahlen auftreten. Dies verhindert man am leichtesten dadurch, dass man in die schattierten Felder nur Zahlen einsetzt, die in der Nähe von 29 liegen, und in die weißen Felder Zahlen, die in der Nähe von 58 liegen. (Dies sind jeweils die Durchschnittswerte, die in den schattierten und weißen Viererblöcken einzuhalten sind. Wenn in allen schattierten Feldern eine 29 und in allen weißen eine 58 steht, ist dies auch eine — wenngleich uninteressante — Lösung.)

Wie gesagt gelten in diesem Rechteck alle Symmetrien, die auch in den Tabellen 1 und 6 gelten, nur kommen weitere hinzu. Die Spaltensummen sind in Tabelle 8 nicht mehr extra vermerkt, weil sie sich als Summe aus drei Viererspalten automatisch ergeben. Durch die Vereinheitlichung der Viererspaltensummen und die Einführung der Diagonalen bilden nun das obere, mittlere und untere Drittel der Tabelle selbständige magische Quadrate mit konstanten Zeilen- und Spaltensummen sowie mit Diagonalen, deren Summen mit den Summen der Viererblöcke übereinstimmen, durch die sie verlaufen. Durch die über die Tabellendrittel hinausreichenden Viererblöcke und Diagonalen sind die drei magischen Quadrate zu einer Einheit verwoben. (Hätte Kellner eine solche Struktur bei Bach gefunden, hätte er in ihr bestimmt einen wunderbaren Ausdruck der „Tri-Unität“[8] gesehen.)

Noch schöner (besonders um die drei magischen Quadrate zu dem zu machen, was man von ihnen traditionell erwartet[9]) wäre es sicher, statt der Einführung der Summen 116 und 232 sämtliche Summen der Tabelle auf 174 zu vereinheitlichen, wobei dieselbe Methode zum Erfolg führt:

8 Kellner, a.a.O., S. 27.

9 In einem traditionellen magischen Quadrat sind die Zeilen, Spalten und Diagonalen auf konstante Summen zu bringen, in einem vier-mal-vier-Quadrat auch die in den Ecken stehenden Viererblöcke. Der in der Mitte des Quadrates stehende Viererblock hat dann automatisch ebenfalls die gleiche Summe.

Frei konstruiertes magisches Rechteck IV

		A	B	C	D		
1	**174**	52	62	28	32	**174**	**174**
2		22	38	**58**	56		**174**
3	**174**	35	**19**	59	**61**	**174**	**174**
4		65	55	29	25		**174**
5	**174**	**48**	51	39	36	**174**	**174**
6		33	**42**	**54**	45		**174**
7	**174**	69	60	**18**	**27**	**174**	**174**
8		**24**	21	63	66		**174**
9	**174**	67	53	37	17	**174**	**174**
10		**31**	23	**73**	47		**174**
11	**174**	26	**34**	44	70	**174**	**174**
12		50	64	20	40		**174**
							2088

Summe aller fett umrandeten Viererblöcke sowie aller mit Linien bezeichneten Viererspalten und Diagonalen: **174**

[Tabelle 9]

In dieser Tabelle wird aus nur 48 Zahlen auf 60 unterschiedliche Arten die Summe 174 gebildet, denn jede Zahl ist Bestandteil von fünf solchen Summen: einer Zeile, einer Viererspalte, zwei diagonal gegeneinander versetzten Viererblöcken und einer Diagonalen. Das obere, mittlere und untere Drittel der Tabelle bilden jeweils ein perfektes magisches Quadrat.

Mit Sicherheit ist für die freie Konstruktion eines solchen „magischen Rechtecks“ keine höhere Mathematik, sondern nur ein gewisses Maß an strukturellem Denken notwendig, für das die Bezeichnung „Wunderrechner“ doch übertrieben wäre. Im Grunde handelt es sich bei der Erstellung solcher Rechtecke um eine Tätigkeit, die mit dem Lösen von Kreuzworträtseln vergleichbar ist, also einen vergnüglichen Zeitvertreib darstellt, aber mit Kunst oder Musik nicht im entferntesten etwas zu tun hat.

Die Anforderungen an dieses Spiel lassen sich übrigens erheblich steigern, indem man fordert, dass alle Zahlen im Rechteck verschieden sind. (Die Tabellen 8 und 9 zeigen solche Lösungen. Diese ließen sich nur aufgrund einer etwas komplizierteren Überlegung finden.)[10]

---

[10] Die Methode der Herleitung einer solchen Lösung sei hier kurz skizziert, ohne vollständigen Beweis. Zunächst die Lösung für den mathematisch einfacheren Fall mit gleichen Summen (Tabelle 9), wobei ausgenutzt wird, dass die Zahl 174 durch 6 teilbar ist. Erster Schritt: In die Felder A5, B6, C6, C7 und A8 werden durch 6 teilbare Zahlen eingesetzt und in D7 eine ungerade durch 3 teilbare Zahl. Daraus lässt sich das gesamte mittlere magische Quadrat berechnen. Dieses Quadrat enthält jetzt ausschließlich durch 3 teilbare Zahlen, und zwar in

Zusammenfassend ist bis hierher festzuhalten, dass das von Henk Dieben aufgestellte Rechteck

1. nicht die einzige Struktur ist, aus der man die Zahlen des Wohltemperierten Klaviers herleiten könnte;
2. Symmetrien enthält, die, solange sie keine bessere Erklärung finden, eher eine Notlösung aufgrund der *zufälligen* Gegebenheiten im Wohltemperierten Klavier zu sein scheinen;
3. von anderen Strukturen, die nicht besonders schwer herstellbar sind, an struktureller Tiefe bei weitem übertroffen wird.

Dies sind zwar keine zwingenden Argumente gegen das Diebensche Rechteck — vielleicht war Bach ja kein „Wunderrechner", sondern ein „mittelmäßiger Rechner", oder wir haben den wahren Sinn der Konstruktion nur noch nicht erfasst —, aber mehr als eine von vielen Erklärungsmöglichkeiten ist das Rechteck Diebens sicher nicht.

Die nun entscheidende Frage, die im nächsten Abschnitt geklärt werden soll, ist die, die schon von Henk Dieben gestellt, aber vorschnell beantwortet wurde: Gibt es eine nennenswerte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Erstellung des Diebenschen Rechtecks durch puren Zufall möglich wurde?

4. Zufallsmengen und magische Rechtecke

Welche Eigenschaften muss eine Zahlenmenge haben, damit aus ihr ein magisches Rechteck eines bestimmten Typs erstellt werden kann, und mit welcher Wahrschein-

---

den Ecken und in der Mitte gerade und ansonsten ungerade. Dass in diesem magischen Quadrat alle Zahlen verschieden sind, erreicht man wegen der wenigen Zahlen, die zu beachten sind, durch „try and error" recht leicht. Zweiter Schritt: In die Felder B3, D3, A10 und C10 werden ungerade, *nicht* durch 3 teilbare Zahlen eingesetzt. Daraus lassen sich nun die Zeilen 3, 4, 9 und 10 vollständig berechnen, in denen dann ausschließlich ungerade, *nicht* durch 3 teilbare Zahlen stehen. Es kann also nicht passieren, dass eine von den sich im zweiten Schritt ergebenden Zahlen mit einer der im ersten Schritt ermittelten übereinstimmt, und somit kann durch „try and error" wieder schnell erreicht werden, dass alle Zahlen voneinander verschieden sind. Dritter Schritt: In die Felder C2 und B11 werden gerade Zahlen eingesetzt, und zwar so, dass sich in den Zeilen 1, 2, 11 und 12 ausschließlich gerade, nicht durch 6 teilbare Zahlen ergeben. (Von der sich im zweiten Schritt ergebenden Struktur der Zeilen 3/4 und 9/10 hängt es ab, ob man dabei jede beliebige nicht durch 6 teilbare gerade Zahl oder nur *entweder* die der Restklasse 2 *oder* die der Restklasse 4 verwenden kann.) Auch diese Zahlen sind nun von allen vorher eingesetzten und errechneten verschieden, und es kann wie vorher durch „try and error" erreicht werden, dass sie auch voneinander verschieden sind. Falls man im Rechteck auch negative Zahlen erlaubt, kommt man mit diesem Verfahren sehr schnell auf eine Lösung mit 48 verschiedenen Zahlen. Eine Lösung, die nicht nur keine negativen, sondern auch keine für die Komposition von Musikstücken zu kleinen Zahlen enthält, bleibt immer noch schwierig zu finden. — In der in Tabelle 8 gezeigten Struktur kann nicht so vorgegangen werden, weil nicht alle Summen durch 6 teilbar sind. Hier ging der Verfasser ebenfalls von der Mitte der Tabelle her von den Zahlen aus, die nah bei den für die 116er- und 232er-Blöcke geltenden Durchschnittswerten (29 und 58) liegen und entfernte sich dann immer weiter von diesen. Bei diesem Verfahren, das in ähnlicher Form auch für Tabelle 8 anwendbar wäre, ist es zwar leichter, negative bzw. zu kleine Zahlen zu vermeiden, aber im Ergebnis entsteht der Eindruck einer schematischen Verteilung der Zahlen, die bei magischen Rechtecken gewissermaßen „unästhetisch" ist. — Derartige Verfahren wären freilich in Bachs oder Diebens Zeit nicht denkbar gewesen, weil die große Zahl von Versuchen, die bis zum Finden einer Lösung notwendig ist, nur dann absolviert werden kann, wenn die Berechnung der nicht frei wählbaren Zahlen jeweils sofort automatisch durch den Computer erfolgt.

lichkeit trifft man zufällig auf eine Zahlenmenge, die diese Eigenschaften besitzt? Wir wollen diese Frage hier nur für die spezifischen Symmetrien des Diebenschen Rechtecks beantworten, wobei natürlich nicht gefragt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit gerade ein Rechteck mit den Zeilensummen 174 zufällig zustandekommt (dass diese Wahrscheinlichkeit gering ist, versteht sich von selbst), sondern nur, mit welcher Wahrscheinlichkeit 48 Zahlen zu einem vier-mal-zwölf-Rechteck geordnet werden können, das die anfangs des 2. Abschnittes aufgeführten vier Symmetrien erfüllt.

Ob es (neben dem nur theoretisch durchführbaren Durchspielen sämtlicher Permutationen) ein allgemeines Verfahren gibt, mit dem für eine vorgegebene Menge entschieden werden kann, ob sie die Erstellung eines magischen Rechteckes mit gegebenen Symmetrien zulässt, ist dem Verfasser nicht bekannt. Jedenfalls lassen sich aber zwei leicht überprüfbare *notwendige Bedingungen* formulieren.

1. Erstellbarkeitsbedingung: Die Gesamtsumme aller Zahlen muss durch 36 teilbar sein.

Jede der vier Symmetrien des Diebenschen Rechteck stellt Anforderungen an die Teilbarkeit der Gesamtsumme: Eine Teilbarkeit durch 12 ist notwendig, damit sich zwölf gleiche Zeilensummen ergeben können; für die vier Spaltensummen muss die Teilbarkeit durch 4 gegeben sein; die im Verhältnis 1:2 zueinander stehenden Viererblocksummen bilden jeweils ein Achtzehntel bzw. ein Neuntel der Gesamtsumme und fordern somit die Teilbarkeit durch 18; und die 4. Symmetrie des Diebenschen Rechtecks erfordert ebenfalls die Teilbarkeit durch 4. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 12, 4, 18 und 4 ist 36; wenn die Gesamtsumme nicht durch 36 teilbar ist, ist also mindestens eine der geforderten Symmetrien nicht herstellbar.

Wenn man 48 Zahlen zufällig ermittelt, ist es klar, dass die Summe ziemlich genau mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/36 (knapp 3%) durch 36 teilbar ist.[11] Somit ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig auf eine Zahlenmenge zu stoßen, die ein Rechteck mit den Diebenschen Symmetrien ermöglicht, jedenfalls kleiner als 3%.

Auch wenn diese Wahrscheinlichkeit nicht sehr groß ist, ist dies wohl noch kein Grund, die Bachschen Zahlen für konstruiert zu halten, denn es gibt ja viele Werke der Musikliteratur, und vermutlich haben etwa 3% dieser Werke zufällig eine durch 36 teilbare Gesamtzahl an Takten. Dass Dieben gerade das Wohltemperierte Klavier Teil I genommen hat, um ein magisches Rechteck zu erstellen, ist ja — wie oben gesagt — vermutlich gerade deswegen geschehen, weil er *zufällig* feststellte, dass die Gesamtzahl der Takte durch 12 teilbar war, und dann hat er aus mehreren theoretisch denkbaren Symmetrien eben gerade diejenige ausgewählt, die *zufällig* herstellbar war.

---

[11] Die exakte Wahrscheinlichkeit hängt von den gesetzten Randbedingungen für die Zufallsverteilung ab, aber nur bei extrem restriktiven Bedingungen kann sie erheblich von 1/36 abweichen.

Zudem wissen wir nicht, bei wievielen Werken Dieben vielleicht vorher schon vergeblich versucht hatte, magische Quadrate oder Rechtecke zu erstellen — hätte er nicht eine besondere Vorliebe für solche Strukturen gehabt, wäre er ja unmöglich auf diese eine gekommen.

Die geringe Wahrscheinlichkeit für die Erfüllung der ersten Erstellbarkeitsbedingung ist also kein Argument, das sich zur Stützung der Hypothese Kellners eignet.

2. Erstellbarkeitsbedingung: *Die Verteilung der Zahlen muss zwei Randbedingungen für die Varianz genügen*:

> *1. Randbedingung*: Da jede Zahl Mitglied einer Zeile ist, deren Summe ein Zwölftel der Gesamtsumme ist, darf (**1a**) *die größte Zahl zusammengenommen mit den drei kleinsten nicht größer als ein Zwölftel der Gesamtsumme*, und (**1b**) *die kleinste Zahl zusammengenommen mit den drei größten nicht kleiner als ein Zwölftel der Gesamtsumme* sein.
>
> *2. Randbedingung*: Die sechs schattierten Viererblöcke ergeben zusammen ein Drittel der Gesamtsumme, die sechs weißen Viererblöcke zwei Drittel. Damit dies möglich ist, darf *die Summe der 24 kleinsten Zahlen nicht größer als ein Drittel der Gesamtsumme sein*.

Um die 2. Randbedingung zu erfüllen, dürfen die Zahlen nicht zu dicht beieinanderliegen (Begrenzung der Varianz nach unten), während die 1. Randbedingung nur erfüllt werden kann, wenn die Zahlen nicht zu weit auseinanderliegen (Begrenzung der Varianz nach oben).

Ob bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Randbedingungen von zufällig ermittelten Zahlenmengen eingehalten werden, hängt von der Verteilung ab, die den Zufallszahlen zugrundeliegt. Zahlen können ja nicht ohne die Vorgabe einer solchen Verteilung zufällig ermittelt werden — sonst wäre beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl kleiner als 100 zu bekommen, gleich Null. (Es gibt unendlich mal mehr Zahlen über 100 als unter 100.)

Welche Wahrscheinlichkeit bei einem „zufällig komponierten" Wohltemperierten Klavier für das Auftreten bestimmter Taktzahlen bestünde, lässt sich weder mit mathematischen noch mit musikhistorischen Methoden bestimmen. Wir wissen zwar, dass das kürzeste Stück in dem Werk 18 Takte und das längste 115 Takte lang ist, aber mit welcher Wahrscheinlichkeit das längste Stück bei einer „zufälligen Komposition" länger als 120 Takte gewesen wäre, lässt sich beim besten Willen nicht sagen. Dies ist aber gerade ein kritischer Wert, der über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Diebenschen Rechtecks entscheidet. Ist nämlich — unter der Annahme, dass die Gesamtsumme 2088 beträgt — das kürzeste Stück 18 Takte lang und das längste länger als 120 Takte, so ist die Randbedingung 1a bereits verletzt.

Bach war also nahe daran, die erste Randbedingung zu verletzen, und auch eine Verletzung der zweiten Randbedingung hätte leicht geschehen können: Die Summe der 24 kleinsten Zahlen ist 648, ein Drittel der Gesamtsumme ist 696. Man sieht daran, dass das Diebensche Rechteck im Hinblick auf die Varianz der Zufallszahlen recht hohe Anforderungen stellt. Auch hieraus wäre allerdings der Schluss nicht zulässig, dass die Zahlen Bachs bewusst in eine bestimmte Konstellation gebracht wurden. Andere Rechtecktypen fordern nämlich andere (und teilweise leichter erfüllbare) Randbedingungen[12], und man kann eben sagen, dass gerade die zufällig gegebene Konstellation der Bachschen Zahlen dazu geführt hat, die Diebenschen Symmetrien und keine anderen herzustellen.

Die zweite Erstellbarkeitsbedingung ist also ebenfalls nicht geeignet, die Hypothese Kellners zu stützen.

Die Aussage, dass es kein Zufall sein kann, dass man aus den Bachschen Zahlen magische Rechtecke erstellen kann, wäre somit nur dann haltbar, wenn auch eine Menge von 48 Zufallszahlen, die diese beiden Erstellbarkeitsbedingungen erfüllt, nur mit äußerst geringer Wahrscheinlichkeit zu einem solchen Rechteck geordnet werden könnte.

Man kann sich zunächst überlegen, dass die Erfüllung der beiden Erstellbarkeitsbedingungen nicht hinreichen kann, um die Möglichkeit eines magischen Rechtecks welcher Art auch immer zu garantieren. Es könnte ja beispielsweise (mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit) trotz der Erfüllung beider Erstellbarkeitsbedingungen vorkommen, dass 46 der Zufallszahlen gerade und 2 ungerade sind. Natürlich müssten dann die Zeilensummen gerade sein. Daher würden die beiden ungeraden Zahlen in ein und derselben Zeile stehen. Daraus folgt aber, dass sie in zwei verschiedenen Spalten stehen, und somit ergeben sich zwei ungerade und zwei gerade Spaltensummen, was in einem magischen Rechteck nicht sein darf.

Es ließe sich ohne Schwierigkeit eine ganze Reihe von ähnlichen Bedingungen formulieren, mit denen im Einzelfall nachgewiesen werden könnte, dass die Erstellung eines magischen Rechtecks *nicht* möglich ist. Da es aber schwierig sein dürfte, einen vollständigen Katalog solcher Bedingungen aufzustellen und dann abzuschätzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine dieser Bedingungen eintritt, ist der Verfasser dieses Beitrages einen anderen Weg gegangen. Er hat — ausgehend von verschiedenen Verteilungen — Zufallsmengen ermittelt, die die beiden Erstellbarkeitsbedingungen erfüllen, und dann konkret versucht, aus diesen Zufallsmengen ein magisches Rechteck mit den von Dieben angegebenen Symmetrien herzustellen. Wenn Dieben recht hätte, hätte der Verfasser bei jedem dieser Versuche scheitern müssen. Das Gegenteil war

12 Das sechs-mal-acht-Rechteck etwa ist im Hinblick auf die 1. Randbedingung weniger anspruchsvoll, und wenn man statt der 1:2-Relation gleiche Summen für alle Viererblöcke fordert, fällt die 2. Randbedingung ganz weg.

der Fall. Nur in einem einzigen der in den beiden Anhängen aufgeführten Versuche war ein solches Rechteck *nicht* herzustellen, und dieser Fall wäre bei einer leicht verschärften Formulierung der ersten Randbedingung gar nicht erst in Betracht gekommen. (Siehe im Anhang 2 die Erläuterung zum „3. Versuch".)

Man kann hieraus schließen, dass eine Zufallsmenge, die die beiden genannten Bedingungen erfüllt, sogar mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit zu einem magischen Rechteck des Diebenschen Typs geordnet werden kann, jedenfalls solange die Zahlen innerhalb einer Grundmenge ermittelt werden, die in der Größenordnung in etwa dem Rahmen des Wohltemperierten Klaviers entspricht.[13] Es scheint daher, dass es nicht nur leicht ist, Mengen zu finden, die sich zur Erstellung eines Diebenschen Rechtecks eignen, sondern dass es im Gegenteil sogar schwierig sein dürfte, Mengen zu finden, die sich nicht dazu eignen und bei denen diese Unmöglichkeit dennoch nicht mit einer einfachen Argumentation nachgewiesen werden kann. Dem Verfasser sind derartige Mengen bisher nicht begegnet.

Bei konstruierten Mengen kann man die möglichen Summen in vieler Hinsicht radikal einschränken (wie es an der Menge, die genau zwei ungerade Zahlen enthält, gezeigt wurde), und dadurch kann man die Unmöglichkeit eines magischen Rechtecks künstlich herbeiführen. Bei Zufallsmengen hingegen führt gerade die chaotische Struktur dazu, dass die verschiedensten Kombinationen auch die verschiedensten Summen ergeben, und dadurch lassen sich unter den unzähligen möglichen Permutationen mit großer Wahrscheinlichkeit auch solche finden, die gerade die gewünschten Summen ergeben.

Es wäre also denkbar, dass die Tatsache, dass Bachs Zahlen in ein magisches Rechteck gebracht werden können, nicht nur nicht auf eine bewusste Konstruktion hinweist, sondern dass sie sogar ein Hinweis darauf ist, dass die Zahlen sich vollkommen chaotisch ergeben haben und keinem besonderen Plan folgen. (Freilich ist das letzte nur eine etwas überspitzte Vermutung und keine strenge Schlussfolgerung aus den Überlegungen dieses Textes.)

Jedenfalls aber spricht — im Gegensatz zur Behauptung Diebens und Kellners — nichts dagegen, dass die Taktzahlen des Wohltemperierten Klaviers Teil I durch reinen Zufall die Erstellung eines magischen Rechtecks ermöglichten. Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass Bach bei der Komposition ein solches Rechteck verwendet hat.

---

[13] Die Größe der Grundmenge, aus der die Zufallszahlen ermittelt werden, hat für die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus den Zufallszahlen ein magisches Rechteck erstellen lässt, eine entscheidende Bedeutung. Je größer die Grundmenge wird, desto unwahrscheinlicher wird es, dass man, wenn man aus den 48 Zufallszahlen vier beliebige herausgreift und addiert, gerade auf ein Zwölftel der Gesamtsumme kommt. Da die Zahl der Möglichkeiten, vier Zahlen herauszugreifen, jedoch gleich bleibt, muss die Wahrscheinlichkeit, dass man auch nur eine Zeile mit der erforderlichen Summe herstellen kann, gegen 0 gehen, wenn die Grundmenge nur hinreichend groß wird.

Anhang 1

Konkrete Beispiele von aus Zufallsmengen erstellten magischen Rechtecken

1. Beispiel: Zunächst wurden aus der Grundmenge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 Zufallsmengen von 48 Zahlen ermittelt, wobei die Wahrscheinlichkeit für jede der 100 Möglichkeiten gleich groß war. Bei dieser Ermittlungsweise wird die zweite Erstellbarkeitsbedingung nur mit äußerst geringer Wahrscheinlichkeitkeit verletzt, so dass man nur so lange Zufallszahlen ermitteln muss, bis sich zufällig eine durch 36 teilbare Gesamtsumme ergibt. Die so ermittelten Zahlen lauteten: 2, 2, 5, 6, 6, 10, 13, 14, 18, 20, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 26, 29, 35, 39, 40, 44, 48, 48, 49, 52, 52, 54, 62, 64, 69, 74, 74, 75, 76, 79, 79, 80, 80, 83, 83, 85, 89, 91, 94, 95, 95, 100. Die gefundene Lösung lautet:

Zufallszahlen von 1 bis 100

		A	**B**	**C**	**D**		
1	**132**	13	52	69	64	**264**	**198**
2		44	**23**	**91**	40		**198**
3	**264**	89	**52**	**22**	35	**132**	**198**
4		49	74	54	21		**198**
5	**132**	75	14	26	83	**264**	**198**
6		20	**23**	**76**	79		**198**
7	**264**	74	**94**	**6**	24	**132**	**198**
8		48	48	100	2		**198**
9	**132**	2	95	39	62	**264**	**198**
10		6	**29**	**83**	80		**198**
11	**264**	79	**85**	**10**	24	**132**	**198**
12		95	5	18	80		**198**
		594	**594**	**594**	**594**		**2376**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **594**

[Tabelle 10]

2. Beispiel: Da im ersten Beispiel der Bereich der Zufallszahlen nicht dem entspricht, was in Musikstücken normalerweise vorkommt (Stücke, die weniger als 8 Takte haben, dürften sehr selten sein), wurden für das zweite Beispiel die Zahlen aus einer nach unten begrenzten Menge ermittelt. Zunächst wurden Zufallszahlen zwischen 18 und 69 ermittelt (der dabei zu erwartende Mittelwert 43,5 entspricht dem des Wohltemperierten Klaviers), aber es stellte sich heraus, dass bei diesem Rahmen die zweite Erstellbarkeitsbedingung nur selten erfüllt wird. (Bei 100 Versuchen war die 2. Randbedingung 95-mal verletzt.) Da zusätzlich die Teilbarkeitsbedingung erfüllt

werden muss, wären sehr viele Versuche erforderlich, um zufällig auf eine Menge zu treffen, die die beiden Erstellbarkeitsbedingungen erfüllt. Die Erfolgsquote steigt deutlich an, wenn man die obere Grenze der Grundmenge erhöht und/oder die untere Grenze absenkt. Bei Zahlen zwischen 17 und 116 etwa — entsprechend in etwa dem Rahmen des Wohltemperierten Klaviers — wurde bei 100 Versuchen die 2. Randbedingung nur noch 24-mal verletzt.

Für das zweite Beispiel wurden daher Zufallszahlen verwendet, die sich zwischen 17 und 116 gleichmäßig verteilen. Die erste Zufallsmenge, die beide Erstellbarkeitsbedingungen erfüllte, war folgende: 18, 22, 23, 24, 24, 25, 27, 27, 28, 30, 30, 34, 37, 41, 44, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 57, 59, 64, 64, 65, 69, 70, 73, 75, 75, 76, 80, 84, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 97, 100, 100, 104, 105, 106, 114, 115. Die gefundene Lösung ist:

Zufallszahlen von 17 bis 116

		A	B	C	D		
1	**168**	24	51	80	97	**336**	**252**
2		65	**28**	**115**	44		**252**
3	**336**	114	**87**	**27**	24	**168**	**252**
4		105	30	70	47		**252**
5	**168**	30	49	73	100	**336**	**252**
6		48	**41**	**88**	75		**252**
7	**336**	37	**106**	**57**	52	**168**	**252**
8		93	100	25	34		**252**
9	**168**	27	69	64	92	**336**	**252**
10		54	**18**	**76**	104		**252**
11	**336**	75	**91**	**22**	64	**168**	**252**
12		84	86	59	23		**252**
		756	**756**	**756**	**756**		**3024**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **756**

[Tabelle 11]

3. Beispiel: Da im zweiten Beispiel eine erheblich größere Gesamtsumme herauskommt als beim Wohltemperierten Klavier, wurde noch die Erstellung eines magischen Rechtecks aus Zufallszahlen zwischen 17 und 86 versucht. Es ergaben sich folgende Zahlen: 17, 17, 24, 26, 26, 27, 27, 29, 30, 30, 33, 33, 34, 34, 35, 35, 35, 37, 42, 43, 44, 45, 45, 50, 53, 55, 58, 59, 59, 60, 60, 63, 63, 65, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 74, 74, 76, 79, 80, 85, 85, 86. Die gefundene Lösung ist:

Zufallszahlen von 17 bis 86

		A	B	C	D		
1	**136**	44	30	85	45	**272**	**204**
2		29	**33**	**73**	69		**204**
3	**272**	74	**45**	**50**	35	**136**	**204**
4		67	86	34	17		**204**
5	**136**	53	27	59	65	**272**	**204**
6		26	**30**	**63**	85		**204**
7	**272**	60	**80**	**37**	27	**136**	**204**
8		72	60	17	55		**204**
9	**136**	24	42	59	79	**272**	**204**
10		35	**35**	**58**	76		**204**
11	**272**	63	**74**	**34**	33	**136**	**204**
12		65	70	43	26		**204**
		612	**612**	**612**	**612**		**2448**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **612**

[Tabelle 12]

4. Beispiel: Die Taktzahlen des Wohltemperierten Klaviers sind nicht symmetrisch um den Mittelwert verteilt, sondern die hohen Taktzahlen weichen sehr viel stärker vom Mittelwert ab als die niedrigen. Die größte Häufung von Taktzahlen ist in der Nähe des niedrigsten Wertes. Dies entspricht ungefähr einer geometrischen Gleichverteilung, bei der die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Wertes umgekehrt proportional zu seiner Größe ist, oder, anders formuliert, bei der die Logarithmen der Zufallswerte sich gleichmäßig verteilen. Eine solche Verteilung kann im Computer am leichtesten dadurch erzeugt werden, dass man eine Gleichverteilung der Logarithmen erzeugt und dann die rückgerechneten Werte ab- bzw. aufrundet. Wenn die Grenzen etwa so wie im Wohltemperierten Klavier gesetzt werden, besteht bei dieser Verteilung kaum eine Gefahr der Verletzung der zweiten Randbedingung, aber die erste Randbedingung (1a) wird leicht verletzt, wenn man die obere Grenze zu hoch wählt. Für den 4. Versuch wurden daher 18 und 116 als Grenzen gewählt. Allerdings passiert es dabei meistens, dass der tatsächlich vorkommende höchste Wert niedriger als im Wohltemperierten Klavier ausfällt, weil die höheren Werte mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit auftreten als die niedrigen.

Dass die so ermittelten Zahlen in der Tat ähnlich verteilt sind wie diejenigen im Wohltemperierten Klavier, zeigt die folgende Gegenüberstellung:

Zufallszahlen	18	18	19	20	22	23	24	24	25	27	28	30	30	31	33	34
WK Teil I	18	19	19	19	20	22	24	24	24	24	26	27	27	28	29	29

Zufallszahlen	35	36	41	42	42	44	44	44	45	47	50	51	52	53	56	62
WK Teil I	30	31	34	34	35	35	35	35	37	38	39	40	40	41	41	42

Zufallszahlen	62	63	63	65	65	69	72	72	75	76	77	82	83	85	106	111
WK Teil I	44	44	47	48	54	55	58	70	72	75	76	86	87	87	104	115

Bei den untersten 9 und den obersten 9 stimmen die Zahlenwerte fast genau überein. In der Mitte sind die Bachschen Werte etwas kleiner als bei der geometrischen Verteilung. Daher ist die Gesamtsumme der Zufallszahlen immer noch größer als diejenige des Wohltemperierten Klaviers. Die Zufallszahlen können folgendermaßen in ein magisches Rechteck gebracht werden:

Geometrisch verteilte Zufallszahlen, 18 bis 116

		A	B	C	D		
1	**132**	20	42	111	25	**264**	**198**
2		18	**52**	**63**	65		**198**
3	**264**	69	**65**	**19**	45	**132**	**198**
4		106	24	24	44		**198**
5	**132**	22	41	63	72	**264**	**198**
6		18	**51**	**85**	44		**198**
7	**264**	83	**53**	**34**	28	**132**	**198**
8		56	72	23	47		**198**
9	**132**	33	27	62	76	**264**	**198**
10		30	**42**	**44**	82		**198**
11	**264**	77	**50**	**36**	35	**132**	**198**
12		62	75	30	31		**198**
		594	**594**	**594**	**594**		**2376**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **594**

[Tabelle 13]

Um der Verteilung der Zahlen der Taktzahlen im Wohltemperierten Klavier noch näher zu kommen, wurden Zahlenmengen ermittelt, indem zu jeder Taktzahl des Wohltemperierten Klaviers zufällig entweder -2, -1, 0, 1 oder 2 addiert wurde. Daraus ergeben sich dann Mengen, die annähernd gleich verteilt sind wie die Zahlen des Wohltemperierten Klaviers, aber im Detail eben „zufällig“ zusammengesetzt sind und jedenfalls nicht durch bewusste Konstruktion entstanden. Genommen wurden nur die Mengen, bei denen zufällig dieselbe Gesamtsumme wie im Wohltemperierten Klavier herauskam. Diese erfüllen dann automatisch die erste Erstellbarkeitsbedingung.

Von diesem Mengentyp wurden 50 verschiedene ermittelt. Zwei davon erfüllten die erste Randbedingung nicht. Bei 47 Mengen war die Erstellung von magischen Rechtecken möglich. In einem Fall konnte es keine Lösung geben, weil es keine Zahlen gab, die die größte Zahl zur erforderlichen Zeilensumme ergänzten.

Zur Methode der Lösungsfindung sei gesagt, dass es dem Verfasser nicht gelungen ist, das Verfahren vollständig zu automatisieren, aber dass der Computer eine wesentliche Hilfe war. Die für die Findung der unten abgedruckten 47 Lösungen benötigte Zeit schwankte zwischen wenigen Minuten und vielen Stunden. In den meisten Fällen war in etwa einer halben Stunde eine Lösung gefunden.

Es zeigte sich bald, dass die eigentliche Schwierigkeit in der Herstellung der ersten und dritten Symmetrie Diebens liegt. Wenn diese beiden Symmetrien hergestellt waren, ließen sich die anderen beiden Symmetrien in fast allen Fällen[14] mit Operationen herstellen, die die Integrität der Zeilen und Viererblöcke nicht verletzen, und zwar mit der Vertauschung von Zahlenpaaren, die sich in derselben Zeile und demselben Viererblock befinden sowie mit der Vertauschung von Zeilenpaaren, die durch Viererblöcke verbunden sind. Die Herstellung der zweiten und vierten Symmetrie hätte ohne Schwierigkeit auch voll automatisiert im Computer erfolgen können, nur war die Aufgabe so einfach, dass der Programmieraufwand sich nicht gelohnt hätte.

Dass die Schwierigkeit der Herstellung der Symmetrien eine derartige Rangfolge ausprägt, liegt daran, dass durch die erste und dritte Symmetrie jeweils zwölf, durch die zweite und vierte Symmetrie aber nur jeweils vier Summen festgelegt werden.

Die 50 Zahlenmengen und die 47 Lösungen sind im Anhang 2 abgedruckt.

Anhang 2

[14] Genau gesagt in allen Fällen außer einem. In diesem einen Fall musste noch einmal eine andere Lösung für die erste und dritte Symmetrie gefunden werden, um die zweite Symmetrie herstellen zu können.

Fehlversuche:

1. Versuch:
20, 20, 20, 20, 20, 22, 22, 23, 25, 25, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 31, 31, 33, 33, 34, 35, 35, 36, 37, 37, 39, 40, 42, 42, 42, 43, 43, 45, 45, 50, 54, 56, 57, 70, 70, 73, 75, 85, 86, 88, 102, 117
(Verletzung der Randbedingung 1a)

3. Versuch:
19, 19, 19, 19, 21, 22, 22, 24, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 28, 30, 31, 33, 33, 35, 35, 35, 36, 36, 37, 39, 40, 41, 41, 41, 43, 45, 46, 46, 46, 53, 56, 60, 68, 74, 76, 77, 85, 86, 89, 104, 116
Unlösbar, weil 19 + 19 + 19 + 116 = 173
und 19 + 19 + 21 + 116 > 174.

8. Versuch:
18, 20, 21, 21, 21, 22, 23, 23, 23, 24, 25, 26, 26, 28, 29, 29, 29, 30, 33, 34, 34, 34, 35, 36, 37, 38, 38, 39, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 48, 49, 54, 56, 57, 71, 73, 74, 78, 85, 87, 88, 105, 117
(Verletzung der Randbedingung 1a)

Erfolgreiche Versuche:

2. Versuch:
16, 20, 20, 21, 21, 22, 24, 24, 25, 25, 26, 28, 28, 28, 28, 29, 29, 30, 33, 34, 35, 35, 36, 36, 36, 37, 39, 39, 39, 41, 42, 42, 44, 45, 46, 50, 54, 55, 59, 69, 70, 73, 75, 86, 88, 88, 105, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	39	37	44	54	**232**	**174**
2		20	**20**	**113**	21		**174**
3	**232**	105	**28**	**25**	16	**116**	**174**
4		29	70	36	39		**174**
5	**116**	34	35	46	59	**232**	**174**
6		25	**22**	**41**	86		**174**
7	**232**	39	**88**	**21**	26	**116**	**174**
8		50	55	33	36		**174**
9	**116**	28	28	30	88	**232**	**174**
10		36	**24**	**69**	45		**174**
11	**232**	75	**42**	**29**	28	**116**	**174**
12		42	73	35	24		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

4. Versuch:
19, 19, 20, 20, 20, 21, 24, 25, 25, 26, 27, 28, 28, 29, 29, 30, 31, 31, 34, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 37, 38, 39, 39, 42, 42, 43, 43, 43, 46, 48, 53, 56, 56, 69, 73, 73, 75, 84, 85, 89, 104, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	21	114	19	**232**	**174**
2		36	**39**	**56**	43		**174**
3	**232**	42	**56**	**42**	34	**116**	**174**
4		30	104	20	20		**174**
5	**116**	24	19	46	85	**232**	**174**
6		35	**38**	**48**	53		**174**
7	**232**	75	**37**	**34**	28	**116**	**174**
8		84	36	28	26		**174**
9	**116**	25	25	35	89	**232**	**174**
10		35	**31**	**39**	69		**174**
11	**232**	43	**73**	**29**	29	**116**	**174**
12		73	43	31	27		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

5. Versuch:
18, 19, 20, 20, 20, 20, 22, 23, 25, 25, 25, 26, 27, 27, 29, 29, 30, 31, 32, 33, 33, 35, 36, 37, 37, 39, 39, 40, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 45, 50, 53, 56, 59, 71, 71, 75, 78, 85, 87, 87, 104, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	20	115	19	**232**	**174**
2		41	**35**	**45**	53		**174**
3	**232**	56	**43**	**33**	42	**116**	**174**
4		104	29	18	23		**174**
5	**116**	22	29	36	87	**232**	**174**
6		20	**45**	**50**	59		**174**
7	**232**	37	**71**	**27**	39	**116**	**174**
8		87	37	25	25		**174**
9	**116**	25	20	85	44	**232**	**174**
10		31	**40**	**32**	71		**174**
11	**232**	40	**75**	**26**	33	**116**	**174**
12		39	78	30	27		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

6. Versuch:
18, 20, 20, 20, 20, 22, 23, 23, 23, 26, 26, 28, 29, 29, 29, 30, 30, 31, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 37, 37, 39, 39, 40, 41, 41, 43, 43, 43, 45, 47, 54, 56, 57, 71, 73, 74, 76, 85, 86, 88, 106, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	18	20	22	114	**232**	**174**
2		35	**43**	**40**	56		**174**
3	**232**	106	**28**	**20**	20	**116**	**174**
4		41	57	41	35		**174**
5	**116**	36	31	34	73	**232**	**174**
6		26	**23**	**88**	37		**174**
7	**232**	45	**86**	**20**	23	**116**	**174**
8		47	54	43	30		**174**
9	**116**	23	29	85	37	**232**	**174**
10		30	**34**	**71**	39		**174**
11	**232**	76	**43**	**26**	29	**116**	**174**
12		39	74	32	29		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

7. Versuch:
18, 19, 19, 19, 21, 22, 24, 24, 24, 24, 25, 26, 28, 29, 29, 30, 30, 32, 33, 33, 33, 34, 35, 35, 37, 38, 39, 40, 40, 40, 41, 43, 45, 45, 46, 50, 56, 56, 56, 70, 74, 74, 74, 85, 86, 87, 105, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	22	19	18	115	**232**	**174**
2		30	**45**	**56**	43		**174**
3	**232**	105	**26**	**24**	19	**116**	**174**
4		45	56	40	33		**174**
5	**116**	24	24	87	39	**232**	**174**
6		28	**40**	**56**	50		**174**
7	**232**	35	**86**	**29**	24	**116**	**174**
8		41	70	34	29		**174**
9	**116**	37	19	85	33	**232**	**174**
10		35	**25**	**40**	74		**174**
11	**232**	46	**74**	**21**	33	**116**	**174**
12		74	38	32	30		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

9. Versuch:
18, 19, 21, 21, 21, 22, 23, 24, 24, 25, 26, 26, 28, 28, 30, 30, 32, 32, 32, 33, 34, 34, 35, 36, 37, 37, 39, 39, 40, 41, 42, 42, 43, 43, 45, 46, 54, 56, 56, 68, 73, 75, 78, 86, 87, 88, 103, 116

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	21	18	19	116	**232**	**174**
2		35	**42**	**43**	54		**174**
3	**232**	45	**56**	**37**	36	**116**	**174**
4		28	103	21	22		**174**
5	**116**	23	21	88	42	**232**	**174**
6		33	**39**	**56**	46		**174**
7	**232**	43	**68**	**37**	26	**116**	**174**
8		87	34	28	25		**174**
9	**116**	24	32	86	32	**232**	**174**
10		30	**30**	**41**	73		**174**
11	**232**	75	**39**	**34**	26	**116**	**174**
12		78	40	32	24		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

10. Versuch:
16, 17, 18, 18, 20, 22, 23, 24, 24, 26, 26, 26, 26, 27, 29, 29, 30, 32, 35, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 39, 40, 40, 40, 42, 44, 46, 47, 49, 53, 56, 60, 69, 74, 74, 77, 84, 85, 89, 106, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	24	20	113	17	**232**	**174**
2		36	**36**	**49**	53		**174**
3	**232**	26	**106**	**26**	16	**116**	**174**
4		60	40	42	32		**174**
5	**116**	24	18	47	85	**232**	**174**
6		37	**37**	**44**	56		**174**
7	**232**	77	**36**	**26**	35	**116**	**174**
8		30	89	26	29		**174**
9	**116**	23	27	40	84	**232**	**174**
10		37	**29**	**69**	39		**174**
11	**232**	74	**46**	**18**	36	**116**	**174**
12		74	38	22	40		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

11. Versuch:
16, 17, 20, 20, 22, 22, 22, 23, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 28, 29, 29, 32, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 39, 39, 41, 41, 41, 42, 43, 44, 44, 46, 50, 53, 56, 60, 69, 70, 75, 76, 85, 86, 89, 102, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	22	115	20	**232**	**174**
2		36	**41**	**53**	44		**174**
3	**232**	41	**60**	**34**	39	**116**	**174**
4		102	29	23	20		**174**
5	**116**	16	26	43	89	**232**	**174**
6		35	**39**	**56**	44		**174**
7	**232**	35	**85**	**29**	25	**116**	**174**
8		76	36	26	36		**174**
9	**116**	22	32	70	50	**232**	**174**
10		27	**35**	**26**	86		**174**
11	**232**	69	**42**	**22**	41	**116**	**174**
12		46	75	25	28		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

12. Versuch:
17, 18, 19, 19, 21, 22, 23, 24, 24, 25, 26, 26, 26, 28, 30, 30, 32, 32, 32, 33, 34, 34, 36, 37, 37, 37, 40, 40, 40, 40, 41, 43, 43, 45, 48, 49, 53, 55, 60, 70, 73, 73, 76, 85, 86, 87, 105, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	21	114	22	**232**	**174**
2		37	**41**	**53**	43		**174**
3	**232**	105	**23**	**28**	18	**116**	**174**
4		49	55	45	25		**174**
5	**116**	24	26	37	87	**232**	**174**
6		32	**34**	**60**	48		**174**
7	**232**	40	**70**	**40**	24	**116**	**174**
8		86	36	19	33		**174**
9	**116**	19	30	40	85	**232**	**174**
10		30	**37**	**34**	73		**174**
11	**232**	40	**76**	**26**	32	**116**	**174**
12		43	73	26	32		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

13. Versuch:
16, 19, 19, 21, 21, 22, 24, 24, 24, 25, 25, 27, 28, 28, 28, 28, 29, 30, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 37, 37, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 43, 46, 46, 47, 54, 54, 56, 71, 74, 74, 77, 84, 88, 89, 104, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	21	16	22	115	**232**	**174**
2		37	**42**	**54**	41		**174**
3	**232**	104	**27**	**19**	24	**116**	**174**
4		54	47	32	41		**174**
5	**116**	19	25	89	41	**232**	**174**
6		35	**37**	**46**	56		**174**
7	**232**	28	**88**	**34**	24	**116**	**174**
8		74	42	28	30		**174**
9	**116**	34	28	84	28	**232**	**174**
10		29	**25**	**43**	77		**174**
11	**232**	46	**71**	**36**	21	**116**	**174**
12		41	74	35	24		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

14. Versuch:
18, 19, 20, 21, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 26, 26, 28, 28, 28, 30, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 36, 37, 37, 40, 40, 40, 42, 42, 42, 43, 44, 47, 48, 53, 55, 57, 70, 73, 74, 75, 87, 87, 87, 106, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	19	21	114	**232**	**174**
2		40	**37**	**53**	44		**174**
3	**232**	106	**24**	**23**	21	**116**	**174**
4		47	55	42	30		**174**
5	**116**	32	37	57	48	**232**	**174**
6		23	**24**	**40**	87		**174**
7	**232**	33	**87**	**28**	26	**116**	**174**
8		70	42	26	36		**174**
9	**116**	31	22	87	34	**232**	**174**
10		35	**28**	**75**	36		**174**
11	**232**	43	**73**	**30**	28	**116**	**174**
12		42	74	40	18		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

15. Versuch:
17, 18, 20, 20, 21, 21, 23, 23, 24, 25, 28, 28, 28, 29, 29, 30, 31, 31, 33, 34, 35, 36, 36, 37, 38, 38, 38, 38, 40, 41, 41, 41, 44, 44, 46, 49, 52, 56, 57, 69, 71, 76, 77, 85, 87, 87, 103, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	21	17	23	113	**232**	**174**
2		37	**41**	**52**	44		**174**
3	**232**	103	**24**	**29**	18	**116**	**174**
4		49	56	38	31		**174**
5	**116**	33	38	57	46	**232**	**174**
6		25	**20**	**85**	44		**174**
7	**232**	41	**69**	**36**	28	**116**	**174**
8		35	87	29	23		**174**
9	**116**	31	34	38	71	**232**	**174**
10		30	**21**	**87**	36		**174**
11	**232**	76	**38**	**20**	40	**116**	**174**
12		41	77	28	28		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

16. Versuch:
16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 23, 26, 26, 26, 26, 27, 28, 28, 29, 31, 33, 33, 33, 34, 34, 36, 36, 37, 37, 39, 39, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 46, 47, 53, 55, 60, 70, 71, 76, 78, 87, 87, 89, 106, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	16	26	114	18	**232**	**174**
2		33	**41**	**47**	53		**174**
3	**232**	43	**55**	**39**	37	**116**	**174**
4		106	28	17	23		**174**
5	**116**	26	42	46	60	**232**	**174**
6		27	**21**	**37**	89		**174**
7	**232**	39	**87**	**22**	26	**116**	**174**
8		36	70	40	28		**174**
9	**116**	20	34	33	87	**232**	**174**
10		29	**33**	**78**	34		**174**
11	**232**	76	**39**	**23**	36	**116**	**174**
12		71	46	26	31		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

17. Versuch:
16, 18, 19, 21, 21, 22, 22, 24, 24, 24, 25, 26, 28, 28, 29, 29, 29, 30, 34, 34, 35, 35, 36, 37, 37, 37, 39, 39, 39, 41, 41, 42, 44, 45, 45, 46, 56, 57, 60, 69, 71, 75, 78, 86, 86, 89, 105, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	22	18	115	19	**232**	**174**
2		39	**37**	**42**	56		**174**
3	**232**	46	**57**	**34**	37	**116**	**174**
4		105	24	16	29		**174**
5	**116**	24	22	39	89	**232**	**174**
6		25	**45**	**44**	60		**174**
7	**232**	36	**69**	**35**	34	**116**	**174**
8		86	41	21	26		**174**
9	**116**	24	35	86	29	**232**	**174**
10		29	**28**	**39**	78		**174**
11	**232**	45	**71**	**21**	37	**116**	**174**
12		41	75	30	28		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

18. Versuch:
17, 17, 21, 21, 21, 22, 23, 24, 24, 25, 25, 25, 26, 27, 29, 30, 30, 32, 34, 34, 34, 34, 35, 35, 37, 38, 39, 39, 40, 40, 41, 42, 42, 44, 49, 50, 52, 54, 58, 72, 72, 74, 75, 88, 88, 89, 105, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	17	25	115	**232**	**174**
2		42	**40**	**52**	40		**174**
3	**232**	105	**23**	**25**	21	**116**	**174**
4		54	50	35	35		**174**
5	**116**	24	25	88	37	**232**	**174**
6		26	**41**	**58**	49		**174**
7	**232**	38	**72**	**34**	30	**116**	**174**
8		88	34	22	30		**174**
9	**116**	24	29	89	32	**232**	**174**
10		21	**42**	**39**	72		**174**
11	**232**	44	**75**	**21**	34	**116**	**174**
12		39	74	34	27		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

19. Versuch:
18, 18, 18, 20, 21, 22, 22, 23, 24, 26, 26, 27, 27, 28, 29, 30, 30, 31, 34, 35, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 39, 40, 42, 42, 43, 44, 46, 49, 55, 56, 58, 68, 72, 75, 77, 85, 88, 88, 105, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	22	18	21	113	**232**	**174**
2		37	**39**	**43**	55		**174**
3	**232**	105	**20**	**31**	18	**116**	**174**
4		49	58	29	38		**174**
5	**116**	37	35	46	56	**232**	**174**
6		18	**26**	**88**	42		**174**
7	**232**	42	**68**	**36**	28	**116**	**174**
8		34	88	22	30		**174**
9	**116**	35	30	72	37	**232**	**174**
10		24	**27**	**85**	38		**174**
11	**232**	75	**36**	**23**	40	**116**	**174**
12		44	77	26	27		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

20. Versuch:
18, 20, 20, 20, 21, 22, 23, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 27, 28, 28, 29, 32, 33, 33, 34, 34, 36, 37, 38, 38, 38, 39, 40, 40, 40, 43, 44, 44, 48, 49, 53, 54, 60, 71, 74, 74, 74, 84, 86, 89, 103, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	20	114	20	**232**	**174**
2		38	**38**	**44**	54		**174**
3	**232**	53	**48**	**40**	33	**116**	**174**
4		103	28	21	22		**174**
5	**116**	28	23	86	37	**232**	**174**
6		39	**26**	**49**	60		**174**
7	**232**	34	**74**	**26**	40	**116**	**174**
8		40	84	18	32		**174**
9	**116**	26	26	33	89	**232**	**174**
10		26	**38**	**36**	74		**174**
11	**232**	44	**74**	**29**	27	**116**	**174**
12		71	43	26	34		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

21. Versuch:
17, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 23, 25, 26, 27, 27, 27, 28, 30, 30, 30, 32, 33, 34, 34, 34, 36, 37, 38, 38, 39, 40, 40, 40, 40, 42, 43, 43, 47, 49, 53, 55, 60, 69, 71, 76, 77, 87, 87, 87, 102, 117

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	18	20	117	19	**232**	**174**
2		38	**40**	**43**	53		**174**
3	**232**	55	**47**	**34**	38	**116**	**174**
4		102	28	17	27		**174**
5	**116**	34	17	36	87	**232**	**174**
6		25	**40**	**60**	49		**174**
7	**232**	43	**69**	**23**	39	**116**	**174**
8		33	87	27	27		**174**
9	**116**	21	32	34	87	**232**	**174**
10		40	**23**	**71**	40		**174**
11	**232**	76	**42**	**30**	26	**116**	**174**
12		37	77	30	30		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

22. Versuch:
16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 27, 28, 28, 28, 30, 33, 34, 34, 34, 34, 35, 37, 37, 37, 39, 39, 40, 41, 42, 42, 42, 42, 46, 47, 52, 55, 59, 70, 74, 74, 78, 86, 86, 88, 105, 116

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	24	16	18	116	**232**	**174**
2		37	**39**	**52**	46		**174**
3	**232**	42	**55**	**42**	35	**116**	**174**
4		105	30	19	20		**174**
5	**116**	25	23	86	40	**232**	**174**
6		34	**34**	**59**	47		**174**
7	**232**	86	**34**	**26**	28	**116**	**174**
8		42	70	34	28		**174**
9	**116**	22	27	88	37	**232**	**174**
10		25	**42**	**33**	74		**174**
11	**232**	41	**78**	**28**	27	**116**	**174**
12		39	74	37	24		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

23. Versuch:
16, 17, 17, 18, 22, 22, 23, 23, 25, 25, 25, 28, 28, 28, 29, 31, 31, 33, 33, 33, 35, 35, 36, 36, 37, 39, 39, 40, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 46, 47, 56, 56, 56, 71, 72, 74, 74, 84, 85, 87, 106, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	116	17	17	25	115	232	174
2		39	**43**	**56**	36		174
3	232	106	**28**	**18**	22	116	174
4		56	42	36	40		174
5	116	16	28	87	43	232	174
6		33	**39**	**46**	56		174
7	232	35	**71**	**43**	25	116	174
8		84	42	25	23		174
9	116	23	33	85	33	232	174
10		29	**31**	**42**	72		174
11	232	47	**74**	**31**	22	116	174
12		37	74	28	35		174
		522	522	522	522		2088

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

24. Versuch:
16, 18, 18, 19, 19, 22, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 28, 28, 29, 29, 31, 33, 33, 33, 34, 34, 35, 36, 36, 39, 39, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 46, 49, 49, 54, 56, 57, 69, 70, 74, 77, 85, 86, 88, 106, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	116	16	26	114	18	232	174
2		40	**34**	**54**	46		174
3	232	56	**43**	**33**	42	116	174
4		106	27	19	22		174
5	116	35	33	49	57	232	174
6		29	**19**	**40**	86		174
7	232	34	**88**	**24**	28	116	174
8		69	41	39	25		174
9	116	36	25	39	74	232	174
10		31	**24**	**49**	70		174
11	232	42	**85**	**29**	18	116	174
12		28	77	33	36		174
		522	522	522	522		2088

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

25. Versuch:
18, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 25, 25, 25, 25, 27, 27, 28, 29, 30, 30, 30, 32, 33, 33, 34, 36, 36, 36, 37, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 56, 57, 59, 69, 74, 75, 76, 85, 85, 87, 104, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	116	20	18	115	21	232	174
2		39	**39**	**56**	40		174
3	232	104	**27**	**21**	22	116	174
4		57	44	33	40		174
5	116	25	23	41	85	232	174
6		36	**32**	**59**	47		174
7	232	30	**87**	**27**	30	116	174
8		69	46	34	25		174
9	116	40	22	36	76	232	174
10		29	**25**	**45**	75		174
11	232	37	**74**	**30**	33	116	174
12		36	85	25	28		174
		522	522	522	522		2088

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

26. Versuch:
19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 28, 28, 30, 33, 33, 35, 35, 35, 36, 37, 39, 39, 39, 40, 41, 41, 41, 41, 43, 44, 46, 46, 54, 55, 56, 72, 73, 75, 76, 87, 88, 88, 104, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	116	19	19	113	23	232	174
2		41	**37**	**41**	55		174
3	232	54	**46**	**39**	35	116	174
4		104	28	20	22		174
5	116	24	20	43	87	232	174
6		33	**39**	**46**	56		174
7	232	33	**88**	**25**	28	116	174
8		39	72	41	22		174
9	116	36	21	76	41	232	174
10		24	**35**	**27**	88		174
11	232	40	**73**	**26**	35	116	174
12		75	44	25	30		174
		522	522	522	522		2088

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

27. Versuch:
16, 18, 19, 20, 21, 21, 24, 24, 24, 24, 26, 27, 29, 29, 29, 29, 29, 31, 34, 34, 35, 36, 36, 36, 37, 38, 39, 39, 39, 40, 40, 42, 42, 44, 47, 48, 52, 56, 57, 71, 72, 77, 78, 85, 87, 87, 103, 117

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	18	117	19	**232**	**174**
2		42	**36**	**44**	52		**174**
3	**232**	56	**47**	**29**	42	**116**	**174**
4		103	26	21	24		**174**
5	**116**	31	16	40	87	**232**	**174**
6		35	**34**	**57**	48		**174**
7	**232**	34	**87**	**29**	24	**116**	**174**
8		71	40	27	36		**174**
9	**116**	24	39	72	39	**232**	**174**
10		29	**24**	**36**	85		**174**
11	**232**	38	**78**	**21**	37	**116**	**174**
12		39	77	29	29		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

28. Versuch:
17, 19, 20, 20, 21, 23, 23, 23, 23, 26, 26, 27, 27, 29, 29, 29, 31, 31, 32, 33, 34, 34, 35, 36, 36, 39, 39, 40, 40, 41, 42, 42, 44, 46, 48, 49, 54, 55, 57, 69, 70, 76, 77, 86, 86, 88, 103, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	23	21	113	17	**232**	**174**
2		36	**36**	**48**	54		**174**
3	**232**	57	**46**	**29**	42	**116**	**174**
4		103	26	26	19		**174**
5	**116**	23	23	88	40	**232**	**174**
6		39	**31**	**49**	55		**174**
7	**232**	33	**86**	**23**	32	**116**	**174**
8		44	69	20	41		**174**
9	**116**	31	27	40	76	**232**	**174**
10		29	**29**	**39**	77		**174**
11	**232**	34	**86**	**20**	34	**116**	**174**
12		70	42	27	35		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

29. Versuch:
17, 17, 18, 19, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 29, 30, 30, 30, 32, 32, 33, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 39, 39, 40, 40, 42, 42, 43, 45, 46, 47, 54, 55, 56, 71, 72, 74, 77, 85, 86, 87, 105, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	19	17	23	115	**232**	**174**
2		45	**35**	**40**	54		**174**
3	**232**	105	**26**	**26**	17	**116**	**174**
4		46	55	40	33		**174**
5	**116**	32	39	56	47	**232**	**174**
6		18	**27**	**87**	42		**174**
7	**232**	42	**72**	**30**	30	**116**	**174**
8		86	32	36	20		**174**
9	**116**	23	29	85	37	**232**	**174**
10		25	**39**	**39**	71		**174**
11	**232**	43	**74**	**27**	30	**116**	**174**
12		38	77	33	26		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

30. Versuch:
18, 18, 20, 21, 21, 22, 22, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 28, 29, 29, 30, 31, 32, 34, 34, 34, 35, 35, 37, 39, 40, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 45, 47, 48, 54, 56, 58, 70, 71, 74, 77, 85, 85, 89, 104, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	21	18	20	115	**232**	**174**
2		35	**42**	**54**	43		**174**
3	**232**	104	**27**	**18**	25	**116**	**174**
4		56	45	39	34		**174**
5	**116**	26	22	89	37	**232**	**174**
6		40	**28**	**48**	58		**174**
7	**232**	34	**85**	**29**	26	**116**	**174**
8		42	71	40	21		**174**
9	**116**	22	35	40	77	**232**	**174**
10		25	**34**	**85**	30		**174**
11	**232**	70	**41**	**31**	32	**116**	**174**
12		47	74	29	24		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

31. Versuch:
18, 19, 20, 20, 20, 20, 24, 24, 24, 25, 26, 27, 28, 28, 28, 29, 30, 30, 33, 34, 35, 36, 36, 36, 36, 37, 39, 40, 40, 40, 41, 42, 42, 46, 47, 48, 55, 55, 58, 68, 73, 75, 77, 86, 87, 88, 105, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	18	24	19	113	**232**	**174**
2		40	**34**	**58**	42		**174**
3	**232**	48	**55**	**36**	35	**116**	**174**
4		105	24	20	25		**174**
5	**116**	20	24	88	42	**232**	**174**
6		36	**36**	**55**	47		**174**
7	**232**	37	**87**	**30**	20	**116**	**174**
8		40	68	36	30		**174**
9	**116**	33	28	86	27	**232**	**174**
10		29	**26**	**46**	73		**174**
11	**232**	75	**39**	**20**	40	**116**	**174**
12		41	77	28	28		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

32. Versuch:
17, 19, 19, 20, 20, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 28, 30, 30, 31, 33, 33, 34, 34, 34, 36, 36, 37, 37, 40, 41, 41, 41, 42, 43, 45, 45, 46, 47, 52, 56, 57, 69, 70, 75, 77, 84, 85, 88, 102, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	17	114	23	**232**	**174**
2		37	**42**	**43**	52		**174**
3	**232**	46	**56**	**36**	36	**116**	**174**
4		102	28	25	19		**174**
5	**116**	20	26	40	88	**232**	**174**
6		33	**37**	**57**	47		**174**
7	**232**	41	**77**	**30**	26	**116**	**174**
8		45	69	41	19		**174**
9	**116**	27	30	33	84	**232**	**174**
10		25	**34**	**45**	70		**174**
11	**232**	85	**31**	**34**	24	**116**	**174**
12		41	75	24	34		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

33. Versuch:
16, 18, 19, 19, 21, 22, 22, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 28, 28, 29, 30, 33, 34, 34, 34, 35, 36, 36, 36, 39, 39, 41, 42, 42, 42, 43, 44, 45, 45, 46, 53, 56, 60, 71, 71, 74, 77, 85, 85, 89, 104, 116

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	19	21	116	18	**232**	**174**
2		42	**34**	**45**	53		**174**
3	**232**	39	**60**	**34**	41	**116**	**174**
4		104	29	22	19		**174**
5	**116**	16	28	45	85	**232**	**174**
6		30	**42**	**46**	56		**174**
7	**232**	89	**28**	**22**	35	**116**	**174**
8		44	71	36	23		**174**
9	**116**	34	22	33	85	**232**	**174**
10		24	**36**	**71**	43		**174**
11	**232**	42	**77**	**27**	28	**116**	**174**
12		39	74	25	36		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

34. Versuch:
16, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 25, 25, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 32, 33, 33, 33, 34, 34, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 40, 42, 42, 43, 43, 45, 48, 48, 52, 57, 60, 68, 74, 74, 75, 85, 87, 88, 106, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	16	22	21	115	**232**	**174**
2		33	**45**	**48**	48		**174**
3	**232**	106	**27**	**19**	22	**116**	**174**
4		57	42	43	32		**174**
5	**116**	25	27	88	34	**232**	**174**
6		26	**38**	**42**	68		**174**
7	**232**	37	**74**	**40**	23	**116**	**174**
8		85	36	20	33		**174**
9	**116**	20	34	87	33	**232**	**174**
10		34	**28**	**52**	60		**174**
11	**232**	40	**74**	**35**	25	**116**	**174**
12		43	75	27	29		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

35. Versuch:
17, 17, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 26, 26, 27, 29, 30, 31, 31, 32, 32, 33, 34, 34, 35, 37, 37, 39, 39, 39, 39, 39, 41, 44, 44, 44, 46, 48, 54, 56, 59, 71, 72, 75, 75, 85, 87, 88, 105, 117

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	37	39	44	54	**232**	**174**
2		23	**17**	**17**	117		**174**
3	**232**	44	**56**	**39**	35	**116**	**174**
4		105	27	25	17		**174**
5	**116**	18	31	88	37	**232**	**174**
6		26	**41**	**59**	48		**174**
7	**232**	30	**87**	**26**	31	**116**	**174**
8		71	44	39	20		**174**
9	**116**	24	32	85	33	**232**	**174**
10		26	**34**	**39**	75		**174**
11	**232**	46	**75**	**32**	21	**116**	**174**
12		72	39	29	34		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

36. Versuch:
18, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 25, 28, 29, 29, 29, 31, 31, 32, 33, 33, 33, 34, 34, 35, 35, 38, 39, 40, 40, 42, 42, 42, 43, 43, 46, 48, 55, 57, 57, 71, 72, 74, 78, 86, 86, 89, 104, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	22	20	113	19	**232**	**174**
2		35	**39**	**57**	43		**174**
3	**232**	104	**29**	**18**	23	**116**	**174**
4		42	57	35	40		**174**
5	**116**	25	18	42	89	**232**	**174**
6		33	**40**	**55**	46		**174**
7	**232**	29	**86**	**38**	21	**116**	**174**
8		43	74	24	33		**174**
9	**116**	32	29	42	71	**232**	**174**
10		31	**24**	**33**	86		**174**
11	**232**	48	**72**	**31**	23	**116**	**174**
12		78	34	34	28		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

37. Versuch:
17, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 23, 23, 25, 25, 26, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 33, 35, 35, 35, 36, 37, 39, 39, 39, 40, 41, 43, 43, 44, 44, 47, 48, 53, 57, 59, 71, 74, 77, 78, 84, 87, 87, 103, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	18	22	114	**232**	**174**
2		39	**39**	**53**	43		**174**
3	**232**	47	**59**	**36**	32	**116**	**174**
4		103	23	23	25		**174**
5	**116**	26	21	87	40	**232**	**174**
6		28	**41**	**57**	48		**174**
7	**232**	43	**71**	**33**	27	**116**	**174**
8		31	87	33	23		**174**
9	**116**	35	17	78	44	**232**	**174**
10		29	**35**	**26**	84		**174**
11	**232**	77	**37**	**35**	25	**116**	**174**
12		44	74	39	17		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

38. Versuch:
18, 18, 19, 20, 22, 22, 23, 23, 24, 25, 26, 27, 27, 28, 28, 29, 29, 31, 33, 34, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 39, 40, 40, 41, 41, 43, 43, 44, 49, 50, 53, 54, 56, 71, 73, 74, 75, 86, 87, 87, 105, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	19	20	22	113	**232**	**174**
2		36	**41**	**53**	44		**174**
3	**232**	105	**23**	**28**	18	**116**	**174**
4		50	54	34	36		**174**
5	**116**	36	33	56	49	**232**	**174**
6		24	**23**	**40**	87		**174**
7	**232**	39	**71**	**37**	27	**116**	**174**
8		36	86	27	25		**174**
9	**116**	18	26	87	43	**232**	**174**
10		41	**31**	**73**	29		**174**
11	**232**	43	**74**	**28**	29	**116**	**174**
12		75	40	37	22		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

39. Versuch:
18, 19, 20, 21, 22, 23, 23, 23, 25, 25, 26, 26, 27, 27, 28, 28, 31, 32, 33, 33, 33, 33, 33, 35, 36, 38, 39, 40, 40, 41, 42, 43, 45, 45, 47, 49, 53, 56, 60, 69, 71, 74, 75, 85, 88, 89, 104, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	41	35	53	45	**232**	**174**
2		18	**22**	**115**	19		**174**
3	**232**	104	**23**	**21**	26	**116**	**174**
4		45	60	36	33		**174**
5	**116**	25	20	40	89	**232**	**174**
6		40	**31**	**56**	47		**174**
7	**232**	38	**88**	**23**	25	**116**	**174**
8		32	74	26	42		**174**
9	**116**	27	33	43	71	**232**	**174**
10		28	**28**	**49**	69		**174**
11	**232**	85	**33**	**33**	23	**116**	**174**
12		39	75	27	33		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

40. Versuch:
19, 20, 20, 20, 21, 21, 23, 23, 25, 25, 25, 26, 26, 27, 29, 29, 30, 32, 32, 33, 33, 36, 36, 36, 37, 37, 38, 39, 40, 41, 41, 43, 44, 44, 49, 49, 54, 57, 59, 71, 72, 75, 76, 84, 85, 87, 104, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	19	20	20	115	**232**	**174**
2		41	**36**	**54**	43		**174**
3	**232**	49	**59**	**37**	29	**116**	**174**
4		104	20	27	23		**174**
5	**116**	23	25	87	39	**232**	**174**
6		30	**38**	**57**	49		**174**
7	**232**	41	**71**	**36**	26	**116**	**174**
8		44	76	29	25		**174**
9	**116**	25	33	84	32	**232**	**174**
10		21	**37**	**44**	72		**174**
11	**232**	85	**32**	**21**	36	**116**	**174**
12		40	75	26	33		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

41. Versuch:
17, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 23, 23, 24, 26, 27, 27, 28, 29, 29, 31, 32, 33, 34, 34, 34, 34, 36, 38, 39, 39, 39, 41, 42, 42, 43, 43, 44, 45, 47, 54, 55, 60, 70, 73, 73, 78, 85, 86, 88, 102, 117

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	20	117	20	**232**	**174**
2		43	**36**	**41**	54		**174**
3	**232**	102	**28**	**21**	23	**116**	**174**
4		47	55	34	38		**174**
5	**116**	27	20	39	88	**232**	**174**
6		27	**42**	**45**	60		**174**
7	**232**	32	**86**	**22**	34	**116**	**174**
8		44	70	39	21		**174**
9	**116**	34	24	31	85	**232**	**174**
10		29	**29**	**73**	43		**174**
11	**232**	42	**73**	**26**	33	**116**	**174**
12		78	39	34	23		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

42. Versuch:
17, 17, 18, 19, 19, 22, 22, 23, 23, 25, 26, 27, 28, 28, 28, 29, 29, 30, 33, 33, 34, 34, 34, 34, 38, 39, 39, 40, 40, 43, 43, 43, 44, 46, 47, 49, 56, 57, 57, 70, 71, 75, 77, 86, 87, 89, 103, 117

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	34	43	40	57	**232**	**174**
2		17	**22**	**117**	18		**174**
3	**232**	103	**29**	**19**	23	**116**	**174**
4		44	56	27	47		**174**
5	**116**	19	29	39	87	**232**	**174**
6		34	**34**	**49**	57		**174**
7	**232**	71	**46**	**34**	23	**116**	**174**
8		40	75	26	33		**174**
9	**116**	28	43	33	70	**232**	**174**
10		17	**28**	**86**	43		**174**
11	**232**	77	**28**	**30**	39	**116**	**174**
12		38	89	22	25		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

43. Versuch:
17, 17, 20, 20, 20, 22, 24, 24, 24, 25, 26, 26, 26, 29, 29, 29, 30, 31, 33, 33, 33, 34, 37, 37, 37, 37, 38, 39, 40, 40, 41, 44, 44, 46, 48, 49, 55, 56, 57, 71, 72, 74, 74, 85, 87, 88, 105, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	22	17	115	20	**232**	**174**
2		44	**33**	**41**	56		**174**
3	**232**	105	**24**	**20**	25	**116**	**174**
4		46	57	31	40		**174**
5	**116**	29	17	40	88	**232**	**174**
6		37	**33**	**49**	55		**174**
7	**232**	37	**87**	**24**	26	**116**	**174**
8		34	74	37	29		**174**
9	**116**	26	26	37	85	**232**	**174**
10		20	**44**	**71**	39		**174**
11	**232**	48	**72**	**24**	30	**116**	**174**
12		74	38	33	29		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

44. Versuch:
17, 18, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 29, 30, 31, 31, 32, 32, 33, 34, 35, 37, 37, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 43, 45, 46, 46, 46, 52, 54, 58, 69, 74, 76, 77, 85, 86, 88, 102, 113

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	20	20	21	113	**232**	**174**
2		35	**41**	**46**	52		**174**
3	**232**	46	**54**	**41**	33	**116**	**174**
4		102	30	25	17		**174**
5	**116**	31	39	58	46	**232**	**174**
6		24	**22**	**40**	88		**174**
7	**232**	43	**69**	**40**	22	**116**	**174**
8		34	86	29	25		**174**
9	**116**	26	32	85	31	**232**	**174**
10		40	**18**	**77**	39		**174**
11	**232**	76	**37**	**37**	24	**116**	**174**
12		45	74	23	32		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

45. Versuch:
17, 17, 19, 20, 21, 22, 22, 23, 24, 25, 25, 26, 27, 27, 29, 30, 31, 33, 33, 33, 34, 35, 36, 36, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 42, 46, 48, 49, 55, 56, 57, 71, 72, 74, 78, 85, 86, 87, 106, 116

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	19	17	22	116	**232**	**174**
2		40	**40**	**55**	39		**174**
3	**232**	106	**21**	**23**	24	**116**	**174**
4		56	49	34	35		**174**
5	**116**	36	33	57	48	**232**	**174**
6		22	**25**	**40**	87		**174**
7	**232**	46	**71**	**27**	30	**116**	**174**
8		29	86	33	26		**174**
9	**116**	20	27	85	42	**232**	**174**
10		31	**38**	**72**	33		**174**
11	**232**	39	**74**	**36**	25	**116**	**174**
12		78	41	38	17		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

46. Versuch:
17, 17, 18, 21, 21, 23, 23, 24, 25, 26, 27, 27, 28, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 34, 34, 35, 35, 36, 37, 37, 38, 39, 40, 41, 41, 42, 42, 44, 47, 48, 52, 57, 58, 71, 71, 73, 75, 85, 87, 88, 104, 114

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	17	26	114	**232**	**174**
2		48	**34**	**52**	40		**174**
3	**232**	104	**29**	**23**	18	**116**	**174**
4		42	57	41	34		**174**
5	**116**	21	23	42	88	**232**	**174**
6		33	**39**	**58**	44		**174**
7	**232**	71	**36**	**32**	35	**116**	**174**
8		38	87	28	21		**174**
9	**116**	34	28	71	41	**232**	**174**
10		30	**24**	**85**	35		**174**
11	**232**	37	**73**	**37**	27	**116**	**174**
12		47	75	27	25		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

47. Versuch:
17, 17, 18, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 28, 28, 28, 29, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 36, 37, 38, 38, 38, 39, 40, 40, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 52, 56, 59, 71, 71, 74, 76, 86, 86, 89, 105, 117

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	39	38	45	52	**232**	**174**
2		22	**17**	**18**	117		**174**
3	**232**	23	**105**	**29**	17	**116**	**174**
4		48	56	28	42		**174**
5	**116**	21	29	35	89	**232**	**174**
6		28	**38**	**71**	37		**174**
7	**232**	86	**40**	**26**	22	**116**	**174**
8		47	59	40	28		**174**
9	**116**	28	24	86	36	**232**	**174**
10		33	**31**	**74**	36		**174**
11	**232**	76	**41**	**32**	25	**116**	**174**
12		71	44	38	21		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

48. Versuch:
16, 17, 19, 19, 21, 22, 22, 24, 25, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 29, 31, 34, 34, 35, 35, 36, 36, 37, 38, 39, 39, 40, 41, 41, 42, 42, 43, 46, 48, 52, 57, 59, 69, 73, 75, 75, 86, 87, 89, 106, 116

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	25	116	16	**232**	**174**
2		39	**35**	**48**	52		**174**
3	**232**	106	**27**	**22**	19	**116**	**174**
4		57	42	39	36		**174**
5	**116**	28	19	38	89	**232**	**174**
6		29	**40**	**59**	46		**174**
7	**232**	35	**87**	**31**	21	**116**	**174**
8		69	41	37	27		**174**
9	**116**	36	34	29	75	**232**	**174**
10		22	**24**	**42**	86		**174**
11	**232**	41	**73**	**34**	26	**116**	**174**
12		43	75	27	29		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

49. Versuch:
17, 18, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 23, 25, 26, 27, 28, 28, 29, 29, 30, 32, 32, 33, 35, 35, 36, 37, 37, 39, 39, 40, 40, 41, 41, 41, 43, 45, 46, 50, 53, 55, 59, 70, 71, 73, 78, 88, 88, 89, 103, 116

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	17	21	116	20	**232**	**174**
2		39	**39**	**43**	53		**174**
3	**232**	103	**28**	**25**	18	**116**	**174**
4		46	55	37	36		**174**
5	**116**	23	28	35	88	**232**	**174**
6		33	**32**	**50**	59		**174**
7	**232**	32	**89**	**23**	30	**116**	**174**
8		40	71	26	37		**174**
9	**116**	35	22	29	88	**232**	**174**
10		41	**18**	**70**	45		**174**
11	**232**	40	**78**	**27**	29	**116**	**174**
12		73	41	41	19		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**

50. Versuch:
16, 17, 18, 18, 20, 23, 23, 24, 24, 24, 26, 26, 26, 30, 30, 30, 32, 32, 33, 33, 33, 34, 34, 35, 36, 38, 39, 39, 40, 41, 43, 43, 43, 46, 49, 49, 55, 55, 59, 70, 71, 76, 77, 86, 87, 87, 103, 115

Magisches Rechteck

		A	B	C	D		
1	**116**	18	18	23	115	**232**	**174**
2		46	**34**	**39**	55		**174**
3	**232**	103	**24**	**23**	24	**116**	**174**
4		34	71	26	43		**174**
5	**116**	20	26	87	41	**232**	**174**
6		30	**40**	**49**	55		**174**
7	**232**	76	**36**	**32**	30	**116**	**174**
8		43	77	24	30		**174**
9	**116**	33	33	59	49	**232**	**174**
10		17	**33**	**86**	38		**174**
11	**232**	32	**87**	**39**	16	**116**	**174**
12		70	43	35	26		**174**
		522	**522**	**522**	**522**		**2088**

Summe der drei mittleren Blöcke zusammen: **522**